

Chapitre 2

Les nombres complexes

I. L'ensemble \mathbb{C}

1) Ensemble de nombres complexes

Théorème (admis) :

Il existe un ensemble de nombres, noté \mathbb{C} , et appelé **ensemble des nombres complexes**, possédant les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} contient \mathbb{R}
- On définit dans \mathbb{C} une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication des réels.
- Il existe dans \mathbb{C} un nombre i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de **manière unique** $z = x + iy$ avec x et y réels.

Exemples :

- Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = 2 - 3i$
 $z + z' = 3 + 5i + 2 - 3i = 3 + 2 + i(5 - 3) = 5 + 2i$
 $zz' = (3 + 5i)(2 - 3i) = 6 - 9i + 10i - 15i^2 = 6 + i + 15 = 21 + i$
- $i^3 = i^2 \times i = -i$; $i^4 = (i^2)^2 = 1$

2) Vocabulaire

Définitions :

Si un nombre complexe s'écrit $z = x + iy$ avec x et y réels, alors :

- $x + iy$ s'appelle la **forme algébrique** de z .
- x est la **partie réelle** de z . On note $x = \text{Re}(z)$.
- y est la **partie imaginaire** de z . On note $y = \text{Im}(z)$.
- si $y = 0$ alors $z = x \in \mathbb{R}$. On retrouve le fait que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- si $x = 0$ alors $z = iy$ est dit **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Exemple :

Pour $z = 2 - i\sqrt{3}$, on a $\text{Re}(z) = 2$ et $\text{Im}(z) = -\sqrt{3}$.

Remarques :

- On note que si $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$.
- Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :
 $z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$
- En particulier, $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) = 0$

Exemple :

Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation : $3z + 2 - 4i = 3$

$$3z + 2 - 4i = 3 \Leftrightarrow 3z = 1 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i .$$

3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$.

On appelle **conjugué** de z et on note \bar{z} le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Ainsi :

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$$

Exemples :

$$\overline{-2+3i} = -2-3i \quad ; \quad \bar{5} = 5 \quad ; \quad \overline{2i} = -2i$$

La notion de conjugué permet de caractériser les nombres réels et les nombres imaginaires purs parmi les nombres complexes.

Propriété :

Soit z un nombre complexe :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad \text{et} \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

Démonstration :

On note $x + iy$ la forme algébrique de z :

- $\bar{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow -2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -x - iy \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z = iy \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Remarques :

$$\bar{\bar{z}} = z ; \quad z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) ; \quad z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z) \quad ; \quad z \bar{z} = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$$

II. Calcul algébrique dans \mathbb{C}

1) Opérations sur les nombres complexes

Soient deux nombres complexes z et z' de formes algébriques respectives $x + iy$ et $x' + iy'$.

Définition :

L'opposé d'un nombre complexe z est le complexe noté $-z$ défini par :

$$-z = -x - iy$$

Propriétés :

- **Somme** de complexes : $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
- **Produit** de complexes : $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

Remarque :

Les identités remarquables valables dans \mathbb{R} le sont également dans \mathbb{C} .

De plus, en voici une nouvelle :

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

Binôme de Newton :

Soit a et b deux nombres complexes et pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$ »

- **Initialisation** : pour $n = 0$, $(a + b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k \times b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 \times b^0 = 1$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} \right) \times (a+b) \quad (\text{d'après l'hypothèse})$$

$$= a \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} \times b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} \times b^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} \times b^{n-k} + \binom{n}{0} a^0 \times b^{n-0+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k \times b^{n-k+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k \times b^{n-k+1} \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k \times b^{n-k+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k \times b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \times b^{n+1-k} . \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

- *Conclusion* : $P(0)$ est vraie. Et, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

Exemples :

- $(2+i)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 2^k \times i^{3-k} = \binom{3}{0} 2^0 \times i^3 + \binom{3}{1} 2^1 \times i^2 + \binom{3}{2} 2^2 \times i^1 + \binom{3}{3} 2^3 \times i^0$

$$(2+i)^3 = 1 \times 1 \times -i + 3 \times 2 \times -1 + 3 \times 4 \times i + 1 \times 8 \times 1 = -i - 6 + 12i + 8 = 2 + 11i$$

- $(1-i)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 1^k \times (-i)^{5-k}$

$$= \binom{5}{0} 1^0 \times (-i)^5 + \binom{5}{1} 1^1 \times (-i)^4 + \binom{5}{2} 1^2 \times (-i)^3 + \binom{5}{3} 1^3 \times (-i)^2 + \binom{5}{4} 1^4 \times (-i)^1 + \binom{5}{5} 1^5 \times (-i)^0$$

$$= 1 \times 1 \times -i + 5 \times 1 \times 1 + 10 \times 1 \times i + 10 \times 1 \times -1 + 5 \times 1 \times -i + 1 \times 1 \times 1$$

$$= -i + 5 + 10i - 10 - 5i + 1$$

$$(1-i)^5 = -4 + 4i$$

Inverse

Propriété :

Tout nombre complexe non nul z de forme algébrique $x + iy$ admet un **inverse** noté $\frac{1}{z}$ de forme algébrique :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

Démonstration :

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $x + iy$.

On cherche un nombre complexe z' de forme algébrique $x' + iy'$ vérifiant $zz' = 1$.

Si $(x + iy)(x' + iy') = 1$ alors $(xx' - yy') + i(xy' + x'y) = 1$ d'où $\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}$.

On multiplie la première égalité par $(-y)$ et la deuxième par x :

$$\begin{cases} -xx'y + y^2y' = -y \\ x^2y' + x'xy = 0 \end{cases} \text{ par addition, on obtient : } \begin{cases} (x^2 + y^2)y' = -y \\ x'y + xy' = 0 \end{cases}$$

Comme $z \neq 0$ alors $x^2 + y^2 \neq 0$ donc :

- si $y \neq 0$: $y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}$. Par suite $x'y = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ d'où $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$.
- si $y = 0$: le système devient $\begin{cases} xx' = 1 \\ xy' = 0 \end{cases}$ et $x \neq 0$ donc $\begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = 0 \end{cases}$.

Dans tous les cas $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Réciproquement $(x + iy) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = 1$.

Remarque :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \text{ et } z\bar{z} = x^2 + y^2$$

Exemples :

- L'inverse du complexe $1 + i$ est $\frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.
- L'inverse de i est le complexe : $\frac{-i}{0^2+1^2} = -i$

Quotient

Définition :

On définit le **quotient** $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, avec $z' \neq 0$.

Remarque :

La forme algébrique d'un quotient est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur .

Exemple :

$$\frac{1-i}{1+2i} = \frac{(1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i-i-2}{1+4} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

Propriété :

$$zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

Démonstration :

- Soit z et z' deux nombres complexes.
Si $z = 0$ alors $0 \times z' = 0$. Si $z' = 0$ alors $z \times 0 = 0$. Donc si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$.
- Réciproquement si $zz' = 0$ démontrons par l'absurde que $z = 0$ ou $z' = 0$.

Supposons que $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors z' admet un inverse $\frac{1}{z'}$ dans \mathbb{C} .

Comme $zz' = 0$ on obtient $(zz') \times \frac{1}{z'} = 0 \times \frac{1}{z'}$ soit $z \times \left(z' \times \frac{1}{z'} \right) = 0$ d'où $z = 0$.

D'où la contradiction, par suite soit $z = 0$ soit $z' = 0$.

2) Opérations sur les conjugués

Propriétés :

Pour tout nombre complexe z et z' et pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}' \quad ; \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

De plus, si $z' \neq 0$ alors :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'} \right)} = \frac{1}{\bar{z}'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Démonstrations :

Soit z et z' deux nombres complexes de forme algébrique $x + iy$ et $x' + iy'$.

• Comme $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ alors $\overline{z + z'} = (x + x') - i(y + y')$ donc $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.

• Comme $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$ alors $\overline{zz'} = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$.

De plus, $\bar{z} \times \bar{z}' = (x - iy)(x' - iy') = xx' - ixy' - ix'y - yy' = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$.

Donc $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

• Si $z \neq 0$ alors $\bar{z} \neq 0$. Comme $\frac{1}{z} \times z = 1$ on a $\overline{\frac{1}{z} \times z} = 1$.

Comme $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ on obtient $\overline{\left(\frac{1}{z}\right) \times z} = 1$ d'où $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Exemples :

• $\overline{(2-i)^2} = (2+i)^2$

• $\overline{\left(\frac{2+3i}{5-i}\right)} = \frac{2-3i}{5+i}$

III. Équation du second degré dans \mathbb{C}

1) Racine carrée dans \mathbb{C} d'un nombre réel

Définition :

a désigne un nombre réel.

Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = a$ sont appelées **racines carrées** de a dans \mathbb{C} .

Propriété :

Tout nombre réel non nul a admet deux racines carrées dans \mathbb{C} .

- Si $a > 0$, ce sont les nombres \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, ce sont les nombres $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Exemples :

• Les racines carrées de 2 dans \mathbb{C} sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

• Les racines carrées de -3 dans \mathbb{C} sont $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$.

2) Équation du second degré à coefficients réels

Propriété :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dont les coefficients a, b, c sont des **nombre réels**, avec $a \neq 0$.

On note Δ le réel $b^2 - 4ac$ appelé le **discriminant**.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions **réelles** :

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution **réelle** : $-\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions **complexes conjuguées** :

$$\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration :

Pour tout nombre complexe z , $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ revient à résoudre $\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ car $a \neq 0$.

- Si $\Delta = 0$, $\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$ équivaut à $z = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$, $z + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ soit :

$$z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, $z + \frac{b}{2a} = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ soit :

$$z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Remarque :

Si l'on note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (avec éventuellement $z_1 = z_2$), alors pour tout nombre complexe z , $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple :

$z^2 + z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3$, donc les solutions dans \mathbb{C} de cette équation sont les nombres complexes conjugués : $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

3) Équation polynomiale à coefficients réels

Définitions :

Soit n un entier naturel et soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels avec $\alpha_n \neq 0$.

On appelle **fonction polynôme de degré n à coefficients réels**, la fonction P définie sur \mathbb{C} par :

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$$

L'équation $P(z) = 0$ est appelée **équation polynomiale de degré n** .

a est une **racine** de P si, et seulement si, $P(a) = 0$.

Propriété :

Soient z et a deux nombres complexes.

Pour tout entier naturel n , non nul,

$$z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$$

avec Q un polynôme de degré, au plus, $n - 1$.

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec $\deg(Q) \leq n - 1$ »

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $z^1 - a^1 = z - a = (z - a) \times Q(z)$ avec $Q(z) = 1$ donc $\deg(Q) = 0 \leq 0$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie,

$$\begin{aligned} z^{n+1} - a^{n+1} &= z \times z^n - a^{n+1} = z \times [a^n + (z - a) \times Q(z)] - a^{n+1} && \text{avec } \deg(Q) \leq n - 1 \\ &= z \times a^n + z(z - a) \times Q(z) - a^{n+1} = a^n(z - a) + z(z - a) \times Q(z) = (z - a) \times [a^n + z \times Q(z)] \\ &= (z - a) \times R(z) \text{ en posant } R(z) = a^n + z \times Q(z) \text{ avec } \deg(Q) \leq n - 1 \text{ donc } \deg(R) \leq n \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $P(1)$ est vraie. Et, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n + 1)$ est vraie.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec $\deg(Q) \leq n - 1$

Exemple :

Pour tout nombre complexe z , on a $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$

Remarque :

Soient z et a deux nombres complexes.

Pour tout entier naturel n , non nul, $z^n - a^n = (z - a) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$

Propriété :

Soit a un nombre complexe.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1.

Si $P(a) = 0$, alors P se factorise par $z - a$.

Autrement dit, si $P(a) = 0$, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré, au plus, $n - 1$.

Démonstration :

Soit P un polynôme tel que $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$.

$$P(z) = P(z) - P(a) \quad (\text{car } P(a) = 0)$$

$$P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 - (\alpha_n a^n + \alpha_{n-1} a^{n-1} + \dots + \alpha_2 a^2 + \alpha_1 a + \alpha_0)$$

$$P(z) = \alpha_n (z^n - a^n) + \alpha_{n-1} (z^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + \alpha_2 (z^2 - a^2) + \alpha_1 (z - a)$$

$$P(z) = \alpha_n (z - a) \times Q_{n-1}(z) + \alpha_{n-1} (z - a) \times Q_{n-2}(z) + \dots + \alpha_2 (z - a) \times Q_1(z) + \alpha_1 (z - a)$$

avec $Q_1, \dots, Q_{n-2}, Q_{n-1}$ des polynômes de degrés, au plus n .

$$P(z) = (z - a)[\alpha_n Q_{n-1}(z) + \alpha_{n-1} Q_{n-2}(z) + \dots + \alpha_2 Q_1(z) + \alpha_1] = (z - a) \times Q(z)$$

En posant $Q(z) = \alpha_n Q_{n-1}(z) + \alpha_{n-1} Q_{n-2}(z) + \dots + \alpha_2 Q_1(z) + \alpha_1$,

Q est un polynôme de degré, au plus n .

Exemple :

Soit P le polynôme complexe défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$.

2 est une racine de P donc P se factorise par $z - 2$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - 2)(z^2 + 1)$.

On trouve exactement trois racines pour P : 2, i et $-i$.

Propriété :

Pour tout entier naturel n , un polynôme, non nul, de degré n admet, au plus, n racines.

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « un polynôme, non nul, de degré n admet, au plus, n racines »

- *Initialisation* : pour $n = 0$, un polynôme de degré nul est constant.
Un polynôme constant, non nul, n'admet aucune racine. Donc $P(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie,
Soit Q un polynôme de degré $n + 1$.
 - Si Q n'admet aucune racine, alors $P(n + 1)$ est vraie.
 - Si Q admet une racine a , alors $Q(z) = (z - a) \times R(z)$ avec R un polynôme et $\deg(R) \leq n$
D'après l'hypothèse de récurrence, R a, au plus, n racines, donc Q en a, au plus, $n + 1$.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
- *Conclusion* : $P(0)$ est vraie. Et, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n + 1)$ est vraie.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un polynôme, non nul, de degré n admet, au plus, n racines.

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients réels (avec $\alpha_n \neq 0$).

Alors :

- La somme de toutes ses racines est égale à $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$.
- Le produit de toutes ses racines est égale à $(-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$.

Exemple :

Soit $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$ les racines d'un polynôme unitaire P .

Comme $z_1 + z_2 = 2$ et $z_1 z_2 = 1^2 + 2^2 = 5$, alors z_1 et z_2 sont les racines du trinôme P défini sur \mathbb{C} par $P(z) = z^2 - 2z + 5$.